20

جامعة البعث　　　　تحليل عقدي /1/　　　　اسم الطالب :

كلية العلوم- قسم الرياضيات　　　　الفصل الأول للعام الدراسي 2015-2016

$Z = re^{i\theta}$; $|Z| = r = 1$

نكتب Z بالشكل القطبي ونضرب طرفي المقام ونطبق القوانين

$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

السؤال الأول :(13درجة)

إذا كان $|z| = 1$ و $z \neq 1$ فاثبت أنّ $\frac{2}{1-z} = 1 + i\cot\frac{\alpha}{2}$

السؤال الثاني : (20درجة)

إذا كان $f(z) = x^3 - 6xy + i(6xy - y^3)$

والمطلوب : 1" -تعيين النقاط التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق

2" - حساب قيمة المشتقة عند هذه النقاط وهل هذه الدالة تحليلية عندها.

السؤال الثالث : (10+10=20درجة)

1"- ليكن $\frac{17\pi}{4} \prec \varphi \prec \frac{25\pi}{4}$ $\qquad \log z = Log(r) + i\varphi$

احسب $2\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$, $\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^2$ ثمّ قارن بينهما .

2" -إعتمادا" على الدوال العكسية أوجد جذور المعادلة $\sin z = 3$

السؤال الرابع : (20درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ فوق النقاط $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ على الترتيب ما هي النقاط الثابتة لهذه التحويلة ثم أوجد خيال المستقيم $y = 0$ وفق هذه التحويلة .

السؤال الخامس : (17+10=27درجة)

أوجد قيمة التكاملين

$$I_1 = \int_{|z+1-i|=3} \frac{z-1}{z^4 + (5-2i)z^3 + (5-5i)z^2} dz$$

$$I_2 = \int_{|z|=a} \frac{b+z}{bz - z^2} dz \qquad 0 \prec a \prec b$$

****

مدرس المقرر

د.رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية مع سلم درجات مادة التحليل العقدي/1/ الفصل الأول 2015-2016

جواب السؤال الأول : (13درجة)

بما أن $z \neq 1 \wedge |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \quad 0 \prec \theta \prec 2\pi$ 3

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{2[(1-\cos\theta) + i\sin\theta]}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{2[(1-\cos\theta + i\sin\theta]}{2(1-\cos\theta)}$$ 5

ومنه فان 5

$$\frac{2}{1-z} = 1 + i\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)} = 1 + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$$

جواب السؤال الثاني :14+6=20درجة

"1- (14)

$$u(x,y) = x^3 - 6xy \quad \wedge v(x,y) = 6xy - y^3$$

$$u_x = 3x^2 - 6y \wedge v_y = 6x - 3y^2 \wedge u_y = -6x \wedge v_x = 6y$$ 6

نلاحظ أنّ هذه المشتقات موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ريمان عندما 2

$$3x^2 - 6y = 6x - 3y^2 \quad \wedge \quad 6y = 6x$$ 6

والحل المشترك لهاتين المعادلتين هو $(0,0) \wedge (2,2)$ أي أنّ الدالة المعطاة قابلة للإشتقاق عند هاتين النقطتين

"2- بما أن (6)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 6y + i\,6y$$ 2

فانّ

$$f'(0) = 0 \quad \wedge f'(2 + i\,2) = 12i$$ 1+1

والدالة المعطاة غير تحليلية عند هاتين النقطتين لأنّ هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط جوار ما لكل من هاتين النقطتين . 2

جواب السؤال الثالث : (10+10=20درجة)

١- (١٥)

$$2\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\left[Log\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right| + i\frac{37\pi}{6}\right] = i\frac{37\pi}{3}$$ 4

$Log\ 1 = 0$

4 $\log(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2})^2 = \log(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = Log\left|\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\,\frac{13\pi}{3} = i\,\frac{13\pi}{3}$

ونلاحظ أنّ $\log(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2})^2 \neq 2\log(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2})$ 2

-2 $\sin z = 3 \Rightarrow z = \arcsin 3 = -i\,\log(i\,3+\sqrt{1-9}) = -i\,\log(i\,3 \pm i\,2\sqrt{2})$ (15)

$= -i\left[Log\left|i\,(3 \pm 2\sqrt{2}\right| + i\,(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\right] = (\frac{\pi}{2}+2n\pi) - iLog\,(3 \pm 2\sqrt{2})$

جواب السؤال الرابع : (8+6+6=20درجة)

التحويلة المطلوبة من الشكل $\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ 2

وبما أنّ $w_1=\infty$ نعوض كل w_1 ب $\frac{1}{w_1}$ ومن ثمّ نوحد المقامات ونختصر فنجد أنّ 1

$\frac{w\,w_1-1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2w_1-1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{0-1}{w-1}\cdot\frac{0-1}{0-1} = \frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0+1}$ 2+1

أي أنّ $\Rightarrow z-1 = wz+w-z-1 \Rightarrow w = \frac{2z}{z+1}$ 2

النقاط الثابتة هي النقاط التي تحقق المعادلة $z = \frac{2z}{z+1} \Rightarrow z^2+z = 2z \Rightarrow z\,(z-1)=0$ 2+1+1

ومنه فأنّ $z=0$ $z=1$ هي النقاط الثابتة . 1+1

لإيجاد خيال المستقيم $y=0$ نلاحظ أنّ النقطتان الثابتتان تقعان على هذا المستقيم لذلك فأنّ الخيال هو المستقيم المار من هاتين النقطتين أي أنّ الخيال هو المستقيم $v=0$. 6

طريقة ثانية :

بما أنّ $w=\frac{2z}{z+1} \Rightarrow z=\frac{-w}{w-2} \Rightarrow x+iy=\frac{-u-iv}{u-2+iv}$ 1+1

أي أنّ $x+iy=\frac{2u-u^2-v^2}{(u-2)^2+v^2}+i\frac{2v}{(u-2)^2+v^2} \Rightarrow y=\frac{2v}{(u-2)^2+v^2}$ 2+1

وبما أنّ $y=0 \Leftarrow v=0$ أي أنّ الخيال هو المستقيم الأفقي . 1

جواب السؤال الخامس : 17+10=27درجة

1"- الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها $(-1,1)$ ونصف قطرها $R=3$ 2

(17)

النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة

$$z^4+(5-2i)z^3+(5-5i)z^2=0 \Rightarrow z^2(z^2+(5-2i)z+5-5i)=0$$ 2

ومنه فأنّ $z=0 \wedge z^2+(5-2i)z+5-5i=0$ 1+1

$$\Delta=(5-2i)^2-4(5-5i)=1 \Rightarrow z_1=-3+i \wedge z_2=-2+i$$ 3

وبما أنّ جميع النقاط الشاذة تقع في داخلية الكفاف ودرجة المقام أكبر من درجة البسط ب3 3

فعندئذ قيمة هذا التكامل تكون مساوية للصفر أن $I_1=0$. 5

2"- النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $bz-z^2=0$ أي ان 2

(15)

$$z(b-z)=0 \Rightarrow z=0 \wedge z=b$$ 2+1

وبالتالي فأنّ

$$I_2=\int_{|z+1-i|=3}\frac{b+z}{z(b-z)}dz=\int_{|z+1-i|=3}\frac{\frac{b+z}{b-z}}{z}dz=2\pi i\left[\frac{b+z}{b-z}\right]_{z=0}=2\pi i$$

3 2 1

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح





جامعة البعث	تحليل عقدي /١/	اسم الطالب :
كلية العلوم – قسم الرياضيات	الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٤-٢٠١٥	

السؤال الأول : (١٠+١٠+١٠+١٠+١٠=٥٠درجة)

١" – تحقق هندسيا"من أنّ العلاقة $|z-3|-|z+3|=4$ تمثل قطعا"زائدا"ثمّ أثبت هذا جبريا" .

٢" - إذا كان $z=re^{i\theta}$ $-\pi < \theta \le \pi$ فأثبت أنّ

$$z^{i}=e^{-(\theta+2n\pi)}\{\cos(\log r)+i\sin(\log r)\} \quad n=0,\pm1,\pm2,... .$$

٣" – أوجد جميع جذور المعادلة $e^{z}=1+i\sqrt{3}$.

٤" – أثبت أنه لاتوجد دالة تحليلية قسمها التخيلي هو الدالة $v(x,y)=x^2-2y$.

٥" – أين تقع النقاط $z=x+iy$ التي تحقق العلاقة $|z|+\mathrm{Re}(z)\le 1$.

السؤال الثاني : (١٥+١٠=٢٥درجة)

١" – أوجد صورة الشريحة اللانهائية $(x>0\ ,\ 0<y<2)$ وفق التحويلة $w=iz+1$.

٢" - أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_3=\infty, z_2=i, z_1=0$ فوق النقاط $w_3=0, w_2=i, w_1=\infty$ على الترتيب .

السؤال الثالث: (١٢+١٣=٢٥درجة)

١" – أوجد جميع قيم $\arg(\sqrt{3}-i)$ وكذلك جميع قيم $\arctan(1+i)$.

٢" – عرف الدالة $f(z)=\dfrac{z^3+2z-i}{z-i}$ عند النقطة $z=i$ لتصبح مستمرة عندها ثمّ أوجد $f'(2i)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

مجموع الدرجات | ١٠ + ١٠ + ١٠ + ١٠ + ١٠ = 50 |

جواب السؤال الأول:

أ- المعادلة $|z-3|-|z+3| = 4$

١) نلاحظ بأن فرق المسافتين ثابت أي أن الفرق ثابت يمثل مجموعة نقاط المستوي التي فرق بعديها عن نقطتين ثابتتين وهما $(-3,0)$ و $(3,0)$ وهذا هو تعريف القطع الزائد — 2

جبرياً نفرض أن $z = x+iy$ فنجد

1 $|x-3+iy|-|x+3+iy| = 4$

1 $\sqrt{(x-3)^2+y^2} - \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 4$

1 $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4 + \sqrt{(x+3)^2+y^2}$ — نربع الطرفين بعد أن

1 $x^2-6x+9+y^2 = 16+8\sqrt{(x+3)^2+y^2} + x^2+6x+9+y^2$

أي أن

1 $-12x-16 = 8\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

$-3x-4 = 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$ — نربع الطرفين ثانية

1 $9x^2+24x+16 = 4\left[x^2+6x+9+y^2\right]$

$9x^2+24x+16 = 4x^2+24x+36+4y^2$

1+1 $5x^2-4y^2 = 20 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5} = 1$

وهي معادلة قطع زائد

ج- نعلم أن

1 $z^c = e^{c\log z}$

وبما أن ... فإن

1 $z^i = e^{i\log z}$

حيث $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

2 $\log z = \operatorname{Log} r + i(\theta + 2n\pi)$

أي أن

3 $z^i = e^{-(\theta+2n\pi)+i\log r}$

3 $= e^{-(\theta+2n\pi)}[\cos\log r + i\sin\log r]$ $\quad n=0,\pm1,\pm2$

ثالثاً: لإيجاد جذور المعادلة

١٥ درجات

$e^z = 1+i\sqrt{3}$

نفرض $z = x+iy$

1 $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

ومنه فإن

1 $e^x\cos y + ie^x\sin y = 1+i\sqrt{3}$

أي أن

1 (1) $e^x\cos y = 1$

1 (2) $e^x\sin y = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan y = \sqrt{3} \Rightarrow$ 1

1 $y = \frac{\pi}{3}+n\pi$

بتربيع وجمع (1) و(2) نجد أن

أي أن

1 $e^{2x} = 4$

1 $2x = \log 4 \Rightarrow x = \log 2$

ومنه فإن حلول المعادلة هي

2 $z = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$ $\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$

رابعاً: نفرض أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

2 دالة تحليلية عند نقطة واستمرارها على منطقة تأثيرها كل من $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ هي دوال توافقية.

الدالة المعطاة هي

$v(x,y) = x^2-2y$

1+1+1+1 $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

ومنه

2 هنا يكفي بأن الدالة بعوضها في الكوشي الى ان الدالة

$f(z) = u(x,y) + i(x^2 - y)$

ليست دالة تحليلية

أي انه لا توجد دالة تحليلية تشمل الجزء التخيلي $v(x,y) = x^2 - 2y$

جـ : نفرض ان $z = x + iy$ ⇐ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 1

(10) اي ان $Re\, z = x$ 1

1 $\sqrt{x^2 + y^2} + x \leq 1$

2 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - x \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 - 2x + x^2$ 2

2 $y^2 \leq 1 - 2x \Rightarrow (x - \frac{1}{2}) \leq -\frac{1}{2} y^2$ 1

جواب السؤال الثاني : $25 = 10 + 15$ عشرون درجة

15 أ- نفرض ان $w = u + iv$ $z = x + iy$ نستنتج 1

1 $u + iv = -y + ix + 1 = 1 - y + ix$

اي ان

1+1 $u = 1 - y$ $v = x$

2 ومنه $x > 0$ ⇐ $v > 0$

2 $0 < y < 2$ ⇐ $-2 < -y < 0$

2 $-1 < 1 - y < 1$

اي ان

2 $-1 < u < 1$

اي ان صورة المجموعة النقاط $x > 0$ $0 < y < 2$

3 $-1 < u < 1$ و $v > 0$

ج - التحويلة هي من الشكل

(١٥)

1 $$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

1 نستبدل كل z_3 بـ $\frac{1}{z_3}$ وكل w_1 بـ $\frac{1}{w_1}$ فنجد أن

2 $$\frac{w-\frac{1}{w_1}}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-\frac{1}{w_1}}=\frac{z-z_1}{z-\frac{1}{z_3}}\cdot\frac{z_2-\frac{1}{z_3}}{z_2-z_1}$$

2 $$\frac{w_1w-1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_1w_2-1}=\frac{z-z_1}{z_3z-1}\ \frac{z_2z_3-1}{z_2-z_1}$$

نعوض في القيم المعطاة مع الانتباه أن نعوض كل z_3 بـ صفر وكل w_1 بـ صفر فنجد أن

2 $$\frac{0-1}{w-0}\cdot\frac{i-0}{0-1}=\frac{z-0}{0-1}\ \frac{0-1}{i-0}$$

1 $$\frac{i}{w}=\frac{z}{i}\Rightarrow\frac{w}{i}=\frac{i}{z}$$

أي أن

1 $$w=-\frac{1}{z}$$

هي التحويلة المطلوبة

جواب السؤال الثاني، $\boxed{25=13+12}$ خمسة وعشرون

أ - نعلم أنه نعلم أنه

12

1 $\arg z=\theta=\arctan\frac{y}{x}$

(4) $=\theta=\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\tan\theta=-\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow\tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

أي أن

1 $\arg z=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$

تذكر أن

1 $z \neq \pm i$ $\arctan z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$

1+1 $\arctan(1+i) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+1+i}{i-1-i}\right) = \frac{i}{2}\log(-1-2i)$

2 $= \frac{i}{2}\left[\mathrm{Log}\,|-1-2i| + i(\theta+2n\pi)\right]$ $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

1 $= -\left(\frac{\theta}{2}+n\pi\right) + \frac{i}{4}\mathrm{Log}\,5$

[illegible]

1 $\tan\theta = 2$ $\wedge$ $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$

ج - حتى تكون الدالة مستمرة يجب أن يكون (13)

2 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

4 $\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^3+2z-i}{z-i} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{z\to i}\frac{3z^2+2}{1} = -3+2 = -1$

إذا عرفت الدالة بهذا الشكل

2 $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3+2z-i}{z-i} & z \neq i \\ -1 & z = i \end{cases}$

فستكون الدالة مستمرة عند $z = i$

2 $f'(z) = \frac{(3z^2+2)(z-i) - (z^3+2z-i)}{(z-i)^2}$

3 $f'(2i) = \frac{(-12+2)(i) - (-8i+4i-i)}{(2i-i)^2} = \frac{-10i+5i}{-1} = \frac{-5i}{-1} = 5i$

انتهت الإجابة [illegible]

مدرس المادة

جامعة البعث   التحليل العقدي /1/   [illegible]

كلية العلوم – قسم الرياضيات   الفصل الأول للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول : (12+13=25درجة)

1" – أكتب العدد العقدي $z = 1 + i\cot\alpha$ ،حيث $0 < \alpha < \pi$ ،بالشكل القطبي .

2" – عين المحل الهندسي لمجموعة قيم z التي تحقق العلاقة $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

السؤال الثاني : (12+13=25درجة)

1" – بفرض أنّ $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فأثبت أنّ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 .$$

2" – أثبت أنّ الدالة $u(x, y) = 4x(1-y)$ دالة توافقية ثمّ أوجد المرافق التوافقي لها ثمّ عبر عن الدالة التحليلية بدلالة z .

السؤال الثالث: (13+12=25درجة)

1" – إذا كان $z = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ فأوجد قيمة $Log(z^2 - 1)$ $z^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2" – أوجد جميع قيم المقادير $\arctan(-\frac{2+i}{5})$ و $arcth(\frac{3+2\sqrt{3}}{7})$.

السؤال الرابع : (14+11=25درجة)

1" – أوجد التحويلة الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 0, z_2 = -\frac{i}{2}, z_3 = i$ فوق النقاط $w_1 = -\frac{i}{2}, w_2 = 0, w_3 = -i$ على الترتيب ثمّ أوجد خيال $|z| \leq 1$.

2" – أوجد خيال المستقيم $y = -x + 1$ وفق التحويلة $w = z^2$.

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول : (12+13=25درجة)

1" – بما أن $z = 1 + i\cot\alpha$ عندئذ $x = 1 \wedge y = \cot\alpha$ وبالتالي فإن 1+1

(12)

$r = \sqrt{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ 3+3

أي أنّ $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ وبالتالي فإنّ الشكل القطبي للعدد المعطى يكون 1

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{\sin\alpha}[\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)]$$ 3

2" – إذا فرضنا أنّ $z = x + iy$ فعندئذ $\left|\frac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| = 2$ ومنه فإنّ 1+1

(13)

$$(x-3)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + y^2] = 4x^2 + 4y^2 + 24x + 36$$ 6

أي أنّ $3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$ ومنه $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$ 2

أي $(x+5)^2 + y^2 = 16$ وهي معادلة دائرة مركزها $(-5,0)$ونصف قطرها $R = 4$ 3

جواب السؤال الثاني : (13 +12=25درجة)

1" – بفرض أنّ $f(z) = u + iv$ عندئذ $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ 1+1

(13)

وبالتالي فإنّ $\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2).\frac{\partial v}{\partial x}$ 1

أي

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = 2u.\frac{\partial u}{\partial x} + 2v.\frac{\partial v}{\partial x}$$ 1

ومنه فإنّ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = 2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2u.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + 2v.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$ 1

و $\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2).\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2).\frac{\partial v}{\partial u} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}$

ومنه $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + 2u.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(\frac{\partial v}{\partial y})^2 + 2v.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

أي أنّ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2u.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + 2v.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$+2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + 2u.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(\frac{\partial v}{\partial y})^2 + 2v.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

ولكن بماأنّ الدالة تحليلية فعندئذ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \wedge \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

وكذلك فإنّ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ بالإستفادة من هذه العلاقات نجد أنّ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 4(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 4(\frac{\partial v}{\partial x})^2 = 4|f'(z)|^2$$

وهو المطلوب .

"2 – بما أنّ $u(x,y) = 4x(1-y)$ فعندئذ $\frac{\partial u}{\partial x} = 4(1-y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -4x$

و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ وبما أنّ هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة و

تحقق معادلة لابلاس التفاضلية $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ فالدالة المعطاة هي دلة توافقية

لإيجاد المرافق التوافقي لها نعلمُ أنّ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ أي ان $\frac{\partial v}{\partial y} = 4 - 4y$ بالمكاملة

بما أن $v = 4y - 2y^2 + \varphi(x)$ (*) بالاشتقاق بالنسبة لـ x يكون 1

$\varphi'(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$ وبما أن $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ فإن $\varphi'(x) = 4x$ ومنه $\varphi(x) = 2x^2 + c$ 1 + 1

أي أن $v(x, y) = 4y - 2y^2 + 2x^2 + c$ وهو المرافق التوافقي وبالتالي فإن 1

$$f(z) = 4x - 4xy + i(4y - 2y^2 + 2x^2 + c)$$ 1

أي $f(z) = 4z + i\,2z^2 + ic$ 1

جواب السؤال الثالث : 13+12=25درجة

1" – بما أن $z = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \Rightarrow z^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \Rightarrow z^2 - 1 = i$ 3 + 3 (13)

ومنه فإن $Log(z^2 - 1) = Logi = Log|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ 2 + 2 + 3

2"- بما أن

* $\arctan z = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{i + z}{i - z}, z \neq \pm i$ 1

فإن

$$\arctan\left(-\frac{2+i}{5}\right) = \frac{i}{2}\log\frac{i - \frac{2+i}{5}}{i + \frac{2+i}{5}} = \frac{i}{2}\log\frac{-2+4i}{2+6i} = \frac{i}{2}\log\frac{-1+2i}{1+3i}$$ 1 + 1

$$= \frac{i}{2}\log\frac{(-1+2i).(1-3i)}{10} = \frac{i}{2}\log\frac{1+i}{2} = \frac{i}{2}\left[Log\left|\frac{1+i}{2}\right| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$$ 1 + 1

$$= -\left(\frac{\pi}{8} + n\pi\right) + iLog\frac{1}{\sqrt{2}}$$ 1

بما أن

* $arcthz = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1$ 1

فإن $orcth(\frac{3+2\sqrt{3}}{7}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{3+2\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{3+2\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{2}\log\frac{10+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log\frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{2}\log(13+7\sqrt{3}) = \frac{1}{2}[Log|13+7\sqrt{3}| + i(0+2n\pi)]$$

$$= Log\sqrt{13+7\sqrt{3}} + i\,n\pi$$

جواب السؤال الرابع : (14 + 11 = 25 درجة)

1" – التحويلة المطلوبة هي من الشكل $\frac{w-w_1}{w-w_3}.\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}.\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

نعوض في القيم المعطاة فنجد $\frac{w+\frac{i}{2}}{w+i}.\frac{0+i}{0+\frac{i}{2}} = \frac{z-0}{z-i}.\frac{-\frac{i}{2}-i}{-\frac{i}{2}-0}$

$$\frac{2w+i}{w+i} = \frac{3z}{z-i} \Rightarrow (2w+i).(z-i) = 3z.(w+i)$$

$$2zw - 2iw + iz + 1 = 3zw + 3iz$$

$$w(z+2i) = 1-2iz \Rightarrow w = \frac{1-2iz}{z+2i}$$

وهي التحويلة المطلوبة لإيجاد الخيال لدينا $z = \frac{-2iw+1}{w+2i}$

أي أن $|-2iw+1| \le |w+2i| \Rightarrow (2v+1)^2 + 4u^2 \le u^2 + (v+2)^2$

أي أن $3u^2 + 3v^2 \le 3 \Rightarrow u^2 + v^2 \le 1$

2- بما أنّ $w = z^2$ فإنّ $v = 2xy$ ، $u = x^2 - y^2$ وبالتالي فإنّ خيال المستقيم $y = -x + 1$ هو مجموعة النقاط

١+١

١١

من الأولى نجد أنّ $v = 2x(-x+1)$ و $u = x^2 - (-x+1)^2 = 2x - 1$

١+١

نعوض في الثانية فنجد أنّ $x = \frac{u+1}{2}$

1

$$v = 2(\frac{u+1}{2}).(\frac{-u+1}{2}) = \frac{1-u^2}{2} \Rightarrow v - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}u^2$$

2×2

أي أنّ الخيال هوقطع مكافىء ذروته $(0, \frac{1}{2})$ وتقعره نحو ال v^- .

2

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جامعة البعث | تحليل عقدي /1/ | اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات | الدورة الصيفية للعام الدراسي2013-2014

السؤال الأول : (13 + 13 + 13 + 13 = 52 درجة)

1"- اكتب العدد العقدي $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ بالشكل القطبي .

2"- أوجد حلول المعادلة $z^3 + 8 = 0$

3"- عبر عن القسم الحقيقي والقسم التخيلي للدالة $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ بدلالة x, y .

4"- إذا كان $w_1 = e^{-iz}$ و $w_2 = e^{-\frac{i}{2}z^2}$ فأثبت أنّ $|w_1 + w_2| \le e^y + e^{xy}$

السؤال الثاني : (15 + 13 + 20 = 48 درجة)

1"- لتكن لدينا الدالة $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ عين مجموعة النقاط التي تكون عندها هذه الدالة قابلة للاشتقاق وهل هذه الدالة تحليلية عند هذه النقاط ، لماذا

2"- باستخدام الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\cos z = \sqrt{2}$.

3"- أوجد التحويلة الكسرية التناظرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$ و $z_2 = \infty$ و $z_3 = -i$ فوق النقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = 1$ و $w_3 = \infty$ ثمّ أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية لأسئلة امتحان مقرر التحليل العقدي/1/ (الدورة الصيفية للعام الدراسي2013-2014)

جواب السؤال الأول : (13+13+13+13=52درجة)

1"_ الشكل القطبي للعدد العقدي هو $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ 2

حيث $R = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge \tan\theta = \frac{y}{x}$ 2

$\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

1+1+1 $R = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$

1+1+1+1 $\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2.\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

وبالتالي الشكل القطبي للعدد العقدي المعطى هو $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})\right]$ 2

2"_ $z^3 + 8 = 0 \Rightarrow z^3 = -8 \Rightarrow z = (-8)^{\frac{1}{3}}$ 1+1

نكتب العدد العقدي -8 بالشكل القطبي $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$ 2

ومنه فإنّ $(-8)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}) : k = 0,1,2$ 3

من أجل $k = 0$ نجد $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$ 1+1

من أجل $k = 1$ نجد $z_1 = 2(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}) = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$ 1+1

من أجل $k = 2$ نجد $z_2 = 2(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$ 1+1

2//

1+2 "3_ بفرض أنّ $z=x+yi \Rightarrow -\frac{1}{z}=-\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$

وبالتالي فإنّ

1+2 $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}=e^{-\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}}=e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}(\cos\frac{y}{x^2+y^2}+i\sin\frac{y}{x^2+y^2})$

ومنه فإنّ 3 $\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)=e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$

و 3 $\mathrm{Im}f(z)=e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}$

************************ •

"4_ بفرض أنّ $z=x+iy$ عندئذ 4 $w_1=e^{-iz}=e^{-i(x+iy)}=e^{y-ix} \Rightarrow |w_1|=e^y$

4 $w_2=e^{-\frac{i}{2}z^2}=e^{-\frac{i}{2}(x^2-y^2+2ixy)}=e^{xy+\frac{i}{2}(x^2-y^2)} \Rightarrow |w_2|=e^{xy}$

ولكن نعلم أنّ 2 $|w_1+w_2| \le |w_1|+|w_2|$

لذلك فإنّ 3 $|w_1+w_2| \le e^y+e^{xy}$

****

-جواب السؤال الثاني : (15+13+20=48درجة)

"1 _ تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية لكل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي-ريمان

ولدينا 1+1 $u(x,y)=x^2+y \wedge v(x,y)=y^2-x$

ومنه فإنّ 1+1+1+1 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x \wedge \frac{\partial v}{\partial y}=2y \wedge \frac{\partial u}{\partial y}=1 \wedge \frac{\partial v}{\partial x}=-1$

ونلاحظ أنّ هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ـ ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

فقط عند نقاط المستقيم $y=x$ أي أنّ الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق فقط عند نقاط المستقيم $y=x$ ولكن أي جوار لأي نقطة من هذا المستقيم نلاحظ أنه يحتوي على نقلط تكون الدالة المعطة قاباة للاشتقاق عند بعضها وغير قابلة للاشتقاق عند بعضها الأخر لذلك فإنّ هذه الالة غير تحليلية عند أي نقطة في المستوي العقدي .

****

"2 _ بما أنّ

$$\cos z=\sqrt{2}\Rightarrow z=\arccos\sqrt{2}$$

ولكن نعلم أنّ

$$\arccos w=-i\log(w+i\sqrt{1-w^2})$$

أي أنّ

$$\arccos\sqrt{2}=-i\log(\sqrt{2}+i\sqrt{1-2})=-i\log(\sqrt{2}\pm 1)=-i\left[Log(\sqrt{2}\pm 1)+i\,2n\pi\right]$$

ومنه فإنّ

$$z=2n\pi-iLog(\sqrt{2}\pm 1)$$

****

"3 _ التحويلة الكسرية الخطية التي تنقل النقاط z_1,z_2,z_3 فوق النقاط w_1,w_2,w_3

هي من الشكل

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

نعوض في هذه العلاقة كل z_2 ب $\frac{1}{z_2}$ وكل w_3 ب $\frac{1}{w_3}$ فنجد أنّ

$$\frac{w-w_1}{w-\frac{1}{w_3}}\cdot\frac{w_2-\frac{1}{w_3}}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{\frac{1}{z_2}-z_3}{\frac{1}{z_2}-z_1}$$

بالإصلاح نجد

$$\frac{w-w_1}{w_3w-1}\cdot\frac{w_3w_2-1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{1-z_2z_3}{1-z_2z_1}$$

2 بالتعويض نجد $\frac{w-0}{0-1}.\frac{0-1}{1-0}=\frac{z-i}{z+i}.\frac{1-0}{1-0}$

1 اي أن $w=\frac{z-i}{z+i}$

وهي التحويلة المطلوبة

2 لإيجاد خيال المستقيم $y=0$ من التحويلة الناتجة نجد $z=\frac{iw+i}{1-w}$

1 بفرض أن $z=x+iy \wedge w=u+iv$ يكون

4 $$x+iy=\frac{-v+i(u+1)}{(1-u)-iv}=\frac{-2v}{(1-u)^2+v^2}+i\,\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$$

2 واستنادا" إلى تساوي عددين عقديين يكون $y=\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$ وبما أنّ $y=0$

1 يكون $u^2+v^2=1$ هو خيال المستقيم $y=0$ وفق التحويلة الناتجة

****

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

٣١/٨/٢٠١٤

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الثاني للعام الدراسي 2013-2014

كلية العلوم – قسم الرياضيات

==

أجب عن الأسئلة الآتية : (10+15+10+15+15+15+20=100درجة)

1"- أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي $z = 8i$.

2"- إذا علمت أنّ $z = 2i$ هو أحد جذور المعادلة $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8 = 0$

فأوجد الجذور الثلاثة الباقية .

3"- بفرض أنّ $z = x + iy$ فأثبت أنّ الدالة $u(x, y) = Im e^{z^2}$ هي دالة توافقية .

4"- بفرض أنّ $f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 فهل $\bar{f}(z)$ مستمرة في z_0 ولماذا .

5"- باستخدام الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 2$

6"- أثبت أنّ $Log(-1+i)^2 \neq 2Log(-1+i)$

7"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$ و $z_2 = 1$ و $z_3 = -i$ فوق النقاط $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = -i$ و $\omega_3 = \infty$ ثم أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة .

انتهت الأسئلة أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول: (10 درجات)

لنكتب العدد المركب $z = 8i$ بالشكل المثلثي

1 $\quad 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3 $\quad (8i)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right]$ حيث $k = 0, 1$

من أجل $k = 0$ يكون الجذر الأول

3 $\quad z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right] = 2+2i$

من أجل $k = 1$ يكون الجذر الثاني

3 $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right] = -2-2i$

جواب السؤال الثاني: (5 درجات)

بما أن $z = 2i$ هو جذر للمعادلة المعاملات حقيقية يكون $z_2 = -2i$ هو أيضاً جذر للمعادلة ويكون:

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$$

وبالتالي تكتب المعادلة بالشكل

$$(z^2+4)(z^2-2z+2) = 0$$

ومنه إما $z^2+4 = 0 \Rightarrow z_1 = 2i \,,\, z_2 = -2i$

أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$z_3 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$z_4 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

أي أن جذور المعادلة هي

$z_1 = 2i \qquad z_2 = -2i \qquad z_3 = 1+i \qquad z_4 = 1-i$

جواب السؤال الثالث (١٥) درجة

إذا كان $z = x + iy$ فإن $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ وهي دالة تحليلية 2

وبما أن الدالة e^z هي دالة تحليلية أي أن e^{z^2} 2

هي دالة تحليلية لأن تراكيب الدوال التحليلية تحليلية أي أن الدالة 2

$$e^{z^2} = u(x,y) + iv(x,y)$$

هي دالة تحليلية وبما أنها تحليلية فحسب كل من دالة الجزء الحقيقي ودالة الجزء التخيلي هي دالة توافقية أي أن 2

$Im\, z^2$ هي دالة توافقية 2

وهو المطلوب

طريقة ثانية (١٥) درجة

$$u(x,y) = Im\, e^{z^2} = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$$

2 $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2y e^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 4x^2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 4xy e^{x^2-y^2} \cos 2xy + 4xy e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 4y^2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy$$

2 $$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2x e^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 4y^2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy - 4xy e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 4xy e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 4x^2 e^{x^2-y^2} \sin 2xy$$

والآن: المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك فإنه

2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

جواب السؤال الرابع: [15] درجة

برهن أنه إذا كان $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ دالة مستمرة عند $z_0 = x_0 + iy_0$ فإن $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ مستمرة عند (x_0, y_0)

البرهان: $\bar{f}(z) = u(x,y) - i\,v(x,y)$ ... 2

$u(x,y)$ و $-v(x,y)$ دالة مستمرة عند (x_0, y_0) ... 2

$\bar{f}(z)$ دالة مستمرة عند z_0 ... 5

وبما أن $f(z) = u + iv$ دالة مستمرة ... فإن u و v مستمرة أيضاً

جواب السؤال الخامس: [15] درجة

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \quad 3$$

$$\sin z = 2 \quad 2$$

$$z = \arcsin 2 = -i \log\left(i2 + \sqrt{1-4}\right) \quad 3$$

$$= -i \log\left(i2 + \sqrt{-3}\right)$$

$$= -i \log\left(i2 \pm i\sqrt{3}\right) \quad 3$$

$$= -i\left[\operatorname{Log}|i(2 \pm \sqrt{3})| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] \quad 3$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad 3$$

جواب السؤال السادس: [15] درجة

$$\operatorname{Log}(-1+i)^2 = \operatorname{Log}(-2i) = \operatorname{Log}|-2i| - i\frac{\pi}{2}$$

$$= \operatorname{Log} 2 - i\frac{\pi}{2} \quad 5$$

$$2\operatorname{Log}(-1+i) = 2\left[\operatorname{Log}|-1+i| + i\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left[\operatorname{Log}\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right] \quad 5$$

$$= \operatorname{Log} 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

ونلاحظ أن

$$\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i) \quad 5$$

جواب السؤال الرابع (20 درجة)

التحويلة المطلوبة هي من الشكل

$$2 \quad \frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

نعوض كل w_3 بـ $\frac{1}{w_3}$ فيكون

$$1 \quad \frac{w-w_1}{w-\frac{1}{w_3}}\cdot\frac{w_2-\frac{1}{w_3}}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$1 \quad \frac{w-w_1}{w_3w-1}\cdot\frac{w_3w_2-1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

بالتعويض نجد

$$1 \quad \frac{w-0}{0-1}\cdot\frac{0-1}{-i-0}=\frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{1+i}{1-i}$$

$$2 \quad w=-i\,\frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{(1+i)^2}{2}=-i\,\frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{2i}{2}$$

$$3 \quad w=\frac{z-i}{z+i}$$

أي أن

حل التحويلة العكسية

$$2 \quad z=\frac{-iw-i}{w-1}$$

$$2 \quad x+iy=\frac{v-iu-i}{u-1+iv}=\frac{v-i(u+1)}{(u-1)+iv}$$

$$2 \quad x+iy=\frac{[v-i(u+1)][(u-1)-iv]}{(u-1)^2+v^2}=\frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}+i\,\frac{-v^2-u^2+1}{(u-1)^2+v^2}$$

2 [illegible] y [illegible] $y=\frac{-v^2-u^2+1}{(u-1)^2+v^2}$ ومنه نجد

2 $\quad u^2+v^2=1$ الدائرة

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. [illegible]

4

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الأول للعام الدراسي 2013-2014

أجب عن الأسئلة الآتية (13+12+10+15+15+10+15+10=100درجة)

1"- أوجد الجذور التكعيبية بالشكل $a+ib$ حيث $a,b\in R$ للعدد العقدي $4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}$.

2"- إذا علمت أن $z_1=1+2i$ هو أحد جذور المعادلة $z^4-3z^3+8z^2-7z+5=0$

فأوجد الجذور الثلاثة الباقية .

3"- إذا كان $f(z)=\dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$ عندما $z\neq i$ فعرف هذه الدالة عند

$z=i$ لتصبح هذه الدالة مستمرة عندها .

4"- إذا كان $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\,6x(2y-1)$ و $f(0)=3-2i$ فاحسب $f(1+i)$.

5"- إذا كان $z=x+iy$ و $u+iv=\tan z$ فأثبت أن

$$u=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+ch2y} \quad \text{و} \quad v=\frac{sh2y}{\cos 2x+ch2y}$$

6"- إذا كان $\log z=Logr+i\theta$ حيث $(r>0,\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\dfrac{8\pi}{3})$ فاحسب

$\log(-1+i)^2$ و $2\log(-1+i)$ ثمّ قارن بينهما .

7"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=-1,z_2=i,z_3=1$ فوق النقاط

$\omega_1=-1,\omega_2=\dfrac{4+3i}{5},\omega_3=1$ ثمّ اوجد خيال $|z|\leq 1$ وفق التحويلة الناتجة .

8"- أوجد خيال $(0\leq x,0\leq y\leq 2)$ وفق التحويلة $\omega=\dfrac{1}{z}$

انتهت الأسئلة أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الاول [13] درجة

المقياس

السعة

2 $\begin{cases} 4\sqrt{2}+i4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(1+i) \\ 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \\ 4\sqrt{2}+i4\sqrt{2} = 8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \end{cases}$

2 $(4\sqrt{2}+i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right]$ $k=0,1,2$

نجد عندما $k=0$ تكون

3 $\begin{cases} z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}) \\ = 2\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

نجد عندما $k=1$ تكون

3 $\begin{cases} z_1 = 2\left[\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right] = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right] \\ = 2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{cases}$

نجد عندما $k=2$ تكون

3 $\begin{cases} z_2 = 2\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right] = 2\left[-\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right] \\ = 2\left[\cos(\pi+\frac{5\pi}{12})+i\sin(\pi+\frac{5\pi}{12})\right] \\ = 2\left[-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right] = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

2/

جواب السؤال الثاني (12) اثنا عشر درجة

بما أن $z_1=1+2i$ جذر للمعادلة فإن $z_2=1-2i$ يكون أيضاً جذر للمعادلة وبما أن — 2

$$(z-z_1)(z-z_2)=(z-1-2i)(z-1+2i)$$
$$=z^2-2z+5$$ — 2

عامل من عوامل المعادلة المعطاة تكتب بالشكل

$$(z^2-2z+5)(z^2-z+1)=0$$ — 2

إما $z^2-2z+5=0 \Leftarrow$

$z_1=1+2i$

$z_2=1-2i$ — 1

أو $z^2-z+1=0$ وبالتالي

$\Delta=1-4=-3=3i^2$ — 1

$$z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \qquad z_4=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$ — 2

وهي جذور المعادلة المعطاة

جواب السؤال الرابع (15) خمسة عشر درجة

تعريف الدالة مستمرة عند z_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ — 2

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}=\frac{3+2i-8-2i+5}{i-i}$$
$$=\frac{0}{0}$$ — 3

عدم التعيين
نزيل عدم التعيين باستخدام أوبيتال

$$\lim_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{12z^3-6z^2+16z-2}{1}=-12i+6+16i-2$$ — 2
$$=4+4i$$ — 1

أصبحت الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i} & z\neq i \\ 4+4i & z=i\end{cases}$$ — 2

جواب السؤال الرابع: | 15 | خمسة عشر درجة

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

1 $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y-1)$

1 $\quad v = 3x^2(2y-1) + g(y)$

1 $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 + g'(y)$

1 $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$\quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -6x(2y-1)$

1 $\quad u = -6x(y^2-y) + g(x)$

1 $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -6(y^2-y) + g'(x)$

1 $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

1 $\quad -6y^2 + 6y + g'(x) = 6x^2 + g'(y)$

1 $\quad g'(y) = -6y^2 + 6y$

1 $\quad g'(x) = 6x^2$

1 $\quad g(x) = 2x^3 + c_1$

1 $\quad g(y) = -2y^3 + 3y^2 + c_2$

$u(x,y) = -6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1$

$v(x,y) = 3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2$

1 $\quad f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2]$

$f(0) = 3-2i \Rightarrow c_1 + ic_2 = 3-2i \Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = -2$

1 $\quad \therefore f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + 3] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 - 2]$

1 $\begin{cases} f(1+i) = [-6(1)(1-1)+2+3]+i[3(2-1)-2+3-2] \\ f(1+i) = 5+2i \end{cases}$

جواب السؤال الخامس : 15 خمسة عشر درجة

1 $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}$

1 $= \frac{[\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y][\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y]}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$

1+1 $= \frac{\sin x \cos x \operatorname{ch}^2 y - \sin x \cos x \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} + i \frac{\sin^2 x \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y + \cos^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch}}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$

1 $\tan z = \frac{\sin x \cos x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} + i \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$

1+1 $= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x (1+\operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} + i \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x (1+\operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$

1+1 $= \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} + i \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$

1 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

1 $\operatorname{sh}^2 y = \frac{-1+\operatorname{ch} 2y}{2}$

1 $\tan z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + i \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$

1+1 $u = \frac{\sin 2x}{\cos 2y + \operatorname{ch} 2y}$ $v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{sh} 2y}$

جواب السؤال السادس: [١٥] [illegible]

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta$$

4 $\log(-1+i)^2 = \log -2i = \operatorname{Log}|-2i| + i\frac{3\pi}{2} = \operatorname{Log} 2 + i\frac{3\pi}{2}$

4 $2\log(-1+i) = 2\left[\operatorname{Log}|-1+i| + i\frac{3\pi}{4}\right] = \operatorname{Log} 2 + i\frac{3\pi}{2}$

[illegible]

2 $\log(-1+i)^2 = 2\log(-1+i)$

جواب السؤال السابع [15] خمسة عشر

التحويلة المطلوبة لاشتقاق

1 $\dfrac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \dfrac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \dfrac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

1 $\dfrac{w+1}{w-1} \cdot \dfrac{\frac{4+3i}{5}-1}{\frac{4+3i}{5}+1} = \dfrac{z+1}{z-1} \cdot \dfrac{i-1}{i+1}$

1 $\dfrac{w+1}{w-1} \cdot \dfrac{-1+3i}{9+3i} = \dfrac{z+1}{z-1} \cdot \dfrac{-1+i}{1+i}$

1+1 $\dfrac{w+1}{w-1} \cdot \dfrac{(-1+3i)(9-3i)}{90} = \dfrac{z+1}{z-1} \cdot \dfrac{(-1+i)(1-i)}{2}$

1+1 $\dfrac{w+1}{w-1} \cdot \dfrac{30i}{90} = \dfrac{z+1}{z-1} \cdot \dfrac{2i}{2}$

1 $\dfrac{w+1}{w-1} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{z+1}{z-1} \Rightarrow (w+1)(z-1) = (3z+3)(w-1)$

2
$$\begin{cases} wz - w + z - 1 = 3zw - 3z + 3w - 3 \\ wz - 3zw - w - 3w = -3z - 3 - z + 1 \\ -2zw - 4w = -4z - 2 \\ w(-2z - 4) = -4z - 2 \end{cases}$$

$$\boxed{w = \frac{2z+1}{z+2}}$$

1 $z = \frac{-2w+1}{w-2} \Leftarrow w = \frac{2z+1}{z+2}$ رجما أن

$|z| = \frac{|-2w+1|}{|w-2|}$

4

$|-2w+1| \leq |w-2|$

$|(-2u+1) - 2iv| \leq |(u-2) + iv|$

$(-2u+1)^2 + 4v^2 \leq (u-2)^2 + v^2$

$4u^2 - 4u + 1 + 4v^2 \leq u^2 - 4u + 4 + v^2$

$3u^2 + 3v^2 \leq 3 \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$

$|w| \leq 1$

1 $w = u + iv$ ، $z = x + iy$

1+1 $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$ $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$

1 $0 \leq u \Leftarrow 0 \leq \frac{u}{u^2+v^2}$ $0 \leq x$

1 $0 \leq -\frac{v}{u^2+v^2} \leq 2$ $0 \leq y \leq 2$

1 $0 \geq v \Leftarrow 0 \leq -v \Leftarrow 0 \leq -\frac{v}{u^2+v^2}$

$\Leftarrow -v \leq 2(u^2+v^2) \Leftarrow -\frac{v}{u^2+v^2} \leq 2$

1 $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}v \geq 0 \Rightarrow u^2 + (v + \frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$ 2

1

$u^2 + (v + \frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$ ، $0 \geq v$ ، $0 \leq u$

جامعة البعث | تحليل عقدي /1/ | اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات | الدورة الصيفية للعام الدراسي 2012-2013

السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50 درجة)

1"- أثبت أنّ $|shy| \le |\sin z| \le chy$ علما" أنّ $z = x + iy$.

2"- أثبت أنّ $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}\,|z|$

3"- عبّر عن الدالة $\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ بدلالة x, y ثمّ وضّح بالشرح لماذا تكون هذه الدالة توافقية في كل نطاق لايحوي نقطة الأصل .

4"- استنادا" إلى تعريف المشتقة أثبت أنّ الدالة $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل وغير قابلة للاشتقاق عند باقي نقاط المستوي العقدي .

5"- أوجد جميع قيم المقدار $(1+i)^{4i}$.

السؤال الثاني : (10+10+10=30درجة)

1"- اعتمادا" على مفهوم الدوال العكسة أوجد حلول المعادلة $\cos z = \sqrt{2}$.

2"- أوجد جميع حلول المعادلة $e^z = -3$.

3"- عرف الدالة $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z - i}{z - i}$ عند النقطة $z = i$ لتصبح مستمرة عندها .

السؤال الثالث : (10+10=20درجة)

1"- أوجد التحويلة الكسرية التي تنقل النقاط $z_3 = 0, z_2 = i, z_1 = 1$ فوق النقاط $\omega_3 = \infty, \omega_2 = -1, \omega_1 = -i$ ثمّ أوجد وفق التحويلة الناتجة خيال الدائرة $|z| = 1$.

2"- أوجد صورة ربع المستوي $1 \le x, 0 \le y$ وفق التحويلة $\omega = \dfrac{1}{z}$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول: $50 = 10+10+10+10+10$

أ- (10) نعلم أن:

2 $|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$

2 $= \sin^2 x + ch^2 y - 1 = ch^2 y - \cos^2 x \leq ch^2 y$

ومنه نجد

1 (1) $|\sin z| \leq ch\, y$

من جهة ثانية بما أن

2 $\sin^2 x + sh^2 y = |\sin z|^2$

يستنتج أن

$sh^2 y \leq |\sin z|^2$

ومنه

1 (2) $|sh\, y| \leq |\sin z|$

من (1) و(2) يستنتج أن

2 $|sh\, y| \leq |\sin z| \leq ch\, y$

ج- (10) نعلم أن

2 (1) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

$= |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$

من جهة ثانية

1 $z^2 = x^2 - y^2 + i\, 2xy$

وباستخدام أن

1 $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

يكون

2 (2) $|2xy| \leq |z^2|$

من (1) و(2) نجد أن

2 $2|z|^2 \geq |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|$

أي أن

1 $2|z|^2 \geq (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن

1 $\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

ب- (10) بفرض أن $z = x + iy$ فنجد

1 $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

ومنه

1 $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left[\cos\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + i\sin\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$

وبالتالي

2 $\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\frac{y}{x^2+y^2}$

نفرض أن $w = f(z) = \frac{1}{z}$ ، $g(w) = e^{w}$ عندئذ

تكون الدالة $e^{\frac{1}{z}}$ هي الدالة المحصلة للدالتين g و f حيث

$$e^{\frac{1}{z}} = (g\circ f)(z) = g(f(z)) = g\left(\frac{1}{z}\right) = e^{\frac{1}{z}}$$

وبما أن الدالة $w = \frac{1}{z}$ تحليلية في كل نقاط المستوي العقدي باستثناء $z=0$ وكذلك الدالة e^{w} دالة تحليلية عندئذ تكون الدالة $e^{\frac{1}{z}}$ تحليلية لأن الدالة المحصلة لدالتين تحليليتين هي دالة تحليلية وبما أنها تحليلية عندئذ كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي تكون دوال توافقية أي أن $Re(e^{\frac{1}{z}})$ هي دالة توافقية.

$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

د (10)

2 $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = |z+\Delta z|^2 - |z|^2$

$= (z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z}) - z\cdot\bar{z} = z\cdot\overline{\Delta z} + \bar{z}\cdot\Delta z + \Delta z\cdot\overline{\Delta z}$

وبالتالي

2 $\frac{\Delta w}{\Delta z} = z\cdot\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$

عندما $z=0$ عندئذ $\bar{z}=0$ وبالتالي

1 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$

أي أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $z=0$

1 عندما $z\neq 0$ لنجعل Δz تسعى نحو الصفر على المحور الحقيقي عندئذ $\Delta z = \overline{\Delta z}$ وبالتالي

1 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = z+\bar{z}$

1 لنجعل Δz تسعى نحو الصفر على المحور التخيلي عندئذ $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ وبالتالي

1 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} - z$

1 وبما أن النهايتين اختلفتا باختلاف الطريق أي أن النهاية غير موجودة أي أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي حيث $z\neq 0$

---

3 - باستخدام $z^{c} = e^{c\,\text{Log}\,z}$ نجد أن (10)

2

4 $(1+i)^{4i} = e^{4i\log(1+i)} = e^{4i[\text{Log}\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)]}$

4 $= e^{-(\pi+8n\pi)}[\cos \text{Log}\,4 + i\sin \text{Log}\,4]$

جواب السؤال الثاني: [٣٠ = ١٠ + ١٠ + ١٠] [illegible]

٤٤

(١٠) أ- [illegible]

1 $z = \cos^{-1}\sqrt{2}$ $\Leftarrow \cos z = \sqrt{2}$

2 $\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]$

2+2 $\cos^{-1}\sqrt{2} = -i\log[\sqrt{2} + i(1-2)^{\frac{1}{2}}] = -i\log(\sqrt{2} \pm 1)$

2 $= -i[\,\mathrm{Log}|\sqrt{2}\pm 1| + i(0 + 2n\pi)]$

1 $= 2n\pi - i\,\mathrm{Log}(\sqrt{2}\pm 1)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

(١٠) ج- [illegible] $z = x + iy$ [illegible]

1 $e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y = -3$

$$\begin{cases} (1) & e^{x}\cos y = -3 \\ (2) & e^{x}\sin y = 0 \end{cases}$$

من (2) [illegible] $\sin y = 0 \Leftarrow y = n\pi$ $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

1 بالتعويض في (1) [illegible]

2 $e^{x}(\pm 1) = -3 \Rightarrow e^{x} = -3$ $e^{x} = 3$ [illegible] $e^{x} = -3$ [illegible] $e^{x} > 0$ [illegible]

2 $y = (\pi + 2n\pi)$ $\Leftarrow e^{x} = 3$ $x = \log 3$ [illegible]

2 $z = \log 3 + (\pi + 2n\pi)i$

(١٠) د- [illegible] z_0 [illegible]

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ 2

3+2 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z^3 + 2z - i}{z - i} = \frac{0}{0} = \lim_{z \to i} \frac{3z^2 + 2}{1} = -1$

[illegible]

3 $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 + 2z - i}{z - i} & z \neq i \\ -1 & z = i \end{cases}$

[illegible] $z = i$

جواب السؤال الثالث : الدرجات $10+10=20$

أ-

(15)

$1 \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

شو ... اذا استبدلنا كل w_3 بـ $\frac{1}{w_3}$ ثم نضع ...

$1 \quad \frac{w-w_1}{w_3 w-1} \cdot \frac{w_2 w_3-1}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

... على ... w_3 ... أ ت

$2 \quad \frac{w+i}{0-1} \cdot \frac{0-1}{-1+i} = \frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{i-0}{i-1}$

$1 \quad \frac{w+i}{-1+i} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{i}{i-1} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{i}{-1+i} \Rightarrow$

$1 \quad w+i = i \frac{z-1}{z} = i\left(1-\frac{1}{z}\right) \Rightarrow w = -\frac{i}{z}$

$4 \Rightarrow z = -\frac{i}{w} \Rightarrow |z| = \frac{1}{|w|} \Rightarrow |w| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |w| = 1$

أي أن ... دائرة الوحدة هي دائرة الوحدة ...

ب- ... $w = u+iv$ ، $z = x+iy$

(15)

$2 \quad w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x+iy = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$

...

$2 \quad x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$

...

$2 \quad v \leq 0 \qquad \Leftarrow \quad 0 \leq -\frac{v}{u^2+v^2} \qquad \Leftarrow \quad 0 \leq y$

$2 \quad u^2+v^2-u \leq 0 \qquad \Leftarrow \quad 1 \leq \frac{u}{u^2+v^2} \qquad \Leftarrow \quad 1 \leq x$

... المستوي ... كما يلي

$v \leq 0$

$2 \quad \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}$

...

مدرس المقرر

د. ...

جامعة البعث   تحليل عقدي /1/   اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات   الفصل الثاني للعام الدراسي 2012-2013

السؤال الأول : (50 درجة)

1" – أوجد الشكل القطبي لمعادلة الدائرة $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

2"- أثبت صحة العلاقة $\left(\frac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x + i\cos x}\right)^n = \cos n(x-\frac{\pi}{2}) + i\sin n(x-\frac{\pi}{2})$

3"- أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للدالة $f(z)=e^{z^2}$ ثم أثبت أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق ثم أثبت أن $f'(z)=2ze^{z^2}$.

4" : بين بالتفصيل لماذا تكون الدالة $\mathrm{Re}(\frac{\cos z}{e^z})$ دالة توافقية في المستوي العقدي.

5" – أوجد القيمة الأساسية للمقدار $\left[\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right]^{3\pi i}$.

السؤال الثاني : (8+8+9=25 درجة)

1" – باستخدام مفهوم الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $chz=-2$

2" – أثبت أن الدالة $f(z)=r^3\cos 3\theta - ir^3\sin 3\theta$ غير تحليلية

3" – أثبت أن $Log(-1+i)^2 \neq 2Log(-1+i)$

السؤال الثالث : (15+10=25 درجة)

1" - أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=2i$ و $z_2=-2i$ و $z_3=\infty$ فوق النقاط $w_1=0$ و $w_2=\infty$ و $w_3=1$ ثم أوجد وفق التحويلة الناتجة خيال الدائرة $|z|=1$.

2" – أوجد خيال المستقيم $y=x-1$ وفق التحويلة $w=z^2$.

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول ... | $10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$ | مجموع

أولاً: (10)

1 — $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Leftarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

1 — $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

نفرض أن $z = x + iy \Leftarrow$

2 — $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

2+2 — $2x = z + \bar{z}$ و $2y = \dfrac{z - \bar{z}}{i} \Rightarrow 2y = -i(z - \bar{z})$

نعوض فنجد أن

1 — $z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} - iz + i\bar{z} - 2 = 0$

1 — $z \cdot \bar{z} - (1+i)z - (1-i)\bar{z} - 2 = 0$

والشكل الديكارتي لمعادلة الدائرة المعطاة
الشكل القطبي $x - x_0 = r\cos\theta$ ، $y - y_0 = r\sin\theta$ إذن

$x - 1 = 2\cos\theta$

$y + 1 = 2\sin\theta$

ثانياً: (10)

$$\frac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x + i\cos x} = \frac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x + i\cos x} \cdot \frac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x - i\cos x} =$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2 - 2i\cos x\,(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x$ ... $2\cos 2$ ...

$$= \frac{1 + 2\sin x - \cos 2x - 2i\cos x\,(1+\sin x)}{2 + 2\sin x}$$

$$= \frac{1 + 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) - 2i\cos x\,(1+\sin x)}{2\,(1+\sin x)}$$

$$= \frac{2\sin x\,(1+\sin x) - 2i\cos x\,(1+\sin x)}{2\,(1+\sin x)} = \sin x - i\cos x$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

ثانياً: نفرض أن $z=x+iy \Leftarrow z^2=x^2-y^2+2ixy$ ومنه يكون

10

$$f(z)=e^{z^2}=e^{x^2-y^2+2ixy}=e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]$$

أي أن

$$\mathrm{Re}\, f(z)=u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

$$\mathrm{Im}\, f(z)=v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

2

حتى تكون الدالة $f(z)=e^{z^2}$ قابلة للاشتقاق يجب أن تكون المشتقات الجزئية للدالتين u و v موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي - ريمان.

1 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy-2y\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

1 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy+2x\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

1 $$\frac{\partial v}{\partial x}=2x\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy+2y\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

1 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy-2x\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

نلاحظ أن كل المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وبالتالي تحقق شرطي كوشي ريمان أي أن

1+1 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

ومنه يكون

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=2x\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy-2y\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy+i\left(2x\,e^{x^2-y^2}\sin 2xy+2y\,e^{x^2-y^2}\cos 2xy\right)$$

2

نعوض كل x بـ z وكل y بصفر فنجد أن

$$f'(z)=2z\,e^{z^2}$$

إثبات: نعلم أن الدالة $\cos z$ الدالة شاملة أي تحليلية في كل نقطة من نقاط المستوى العقدي

وكذلك e^z هي أيضاً دالة شاملة أي تحليلية في كل نقطة من نقاط المستوى

العقدي وبما أنه مشتقة والنسبة تحليلية هي دالة تحليلية باستثناء أصفار المقام

والتي نعدم المقام نستنتج أن الدالة $\frac{\cos z}{e^z}$ هي دالة

تحليلية في كل نقطة من نقاط المستوى العقدي لأنه $e^z \neq 0$

أيا كان z من المستوى العقدي

وبما أن الدالة $\frac{\cos z}{e^z}$ هي دالة تحليلية نستنتج كل من دالتي

القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي لها تكون دالة توافقية أي

أن الدالة $Re\,\frac{\cos z}{e^z}$ توافقية

(15) أوجد القيمة الرئيسية للمقدار z^c بالعلاقة

$z^c = e^{c\,Log\,z}$ ، $Log\,z = Log|z| + i\theta$

وبالتالي

$\left[\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i\,Log\left(\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right)}$

وبما أن

$Log\,\frac{e+\sqrt{3}ei}{2} = Log\left|\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right| + i\,Arg\left(\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right)$

وبما أن

$\left|\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right| = \sqrt{\frac{e^2}{4}+\frac{3e^2}{4}} = \sqrt{e^2} = e$

$\theta = Arg\left(\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}e}{2}}{\frac{e}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

أي أن

$\left[\frac{e+\sqrt{3}ei}{2}\right]^{3\pi i} = e^{3\pi i\left[Log\,e + i\frac{\pi}{3}\right]}$

$= e^{3\pi i - \pi^2} = -e^{-\pi^2}$

حل السؤال الثاني $\boxed{8 + 8 + 9 = 25}$ درجة

أولاً، نعلم أنه إذا كان $z = \operatorname{arcch}(-2)$ فإن $\operatorname{ch} z = -2$ (8)

ولكن

1 $\quad \operatorname{arcch} w = \operatorname{Log}\left(w + (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)$

أي أن:

2 $\quad z = \operatorname{arcch}(-2) = \operatorname{Log}\left(-2 + (4-1)^{\frac{1}{2}}\right)$

1+1 $\quad = \operatorname{Log}(\pm\sqrt{3} - 2) = \operatorname{Log}|2 \pm \sqrt{3}| + i(\pm\pi + 2n\pi)$

1 $\quad = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) + i(\pi + 2n\pi)$

1 $\quad = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) + i(2n+1)\pi$

ثانياً: هنا لدينا (8)

$u(r,\theta) = r^3 \cos 3\theta \qquad v(r,\theta) = -r^3 \sin 3\theta$

1+1 $\quad \frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -3r^3 \cos 3\theta$

1+1 $\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -3r^3 \sin 3\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -3r^2 \sin 3\theta$

لكن المشتقات موجودة ومستمرة لأجل كل نقطة من نقاط المستوي العقدي

ولكن

1+1 $\quad \frac{\partial u}{\partial r} \neq \frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} \neq -\frac{\partial u}{\partial r}$

أي لا تتحقق إلا عند $r=0$ ومن أنه الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق

عند نقطة واحدة فقط من المستوي العقدي وهي $z=0$ وبالتالي الدالة

2 غير تحليلية عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي

ثالثاً: (9)

4 $\quad \operatorname{Log}(-1+i)^2 = \operatorname{Log}(-2i) = \operatorname{Log}|-2i| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\quad = \operatorname{Log} 2 - i\frac{\pi}{2}$

3 $\quad \operatorname{Log}(-1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{1+1} + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + i\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي

$\quad 2\operatorname{Log}(-1+i) = \operatorname{Log} 2 + i\frac{3\pi}{2}$

ونلاحظ أن:

2 $\quad \operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$

6N

جواب السؤال الثالث: [25 = 10 + 15] محمد ...

أولاً: التحويلة هي المستقلة (15)

1 $$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

ملاحظة بما أن $z_3=\infty$ و $w_2=\infty$ سوف نستبدل كل z_3 بـ $\frac{1}{z_3}$ وكل w_2 بـ $\frac{1}{w_2}$

فينتج:

1 $$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{\frac{1}{w_2}-w_1}{\frac{1}{w_2}-w_1}=\frac{z-z_1}{z-\frac{1}{z_3}}\cdot\frac{z_2-\frac{1}{z_3}}{z_2-z_1}$$

2 $$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{1-w_2\cdot w_3}{1-w_1w_2}=\frac{z-z_1}{z_3z-1}\cdot\frac{z_3z_2-1}{z_2-z_1}$$

سوف نأخذ البسط والمقام لأن سوف نضرب z_3 بصفر و w_2 بصفر فينتج:

1 $$\frac{w-0}{w-1}\cdot\frac{1-0}{1-0}=\frac{z-2i}{0-1}\cdot\frac{0-1}{-2i-2i}$$

1 $$\frac{w-}{w-1}=\frac{z-2i}{-4i}\Rightarrow -4iw=wz-2iw-z+2i$$

2 $$-wz-2iw=-z+2i\Rightarrow w(-z-2i)=-z+2i$$

$$w=\frac{-z+2i}{-z+2i}\Rightarrow w=\frac{z-2i}{z+2i}$$

أما التحويلة العكسية هي:

1 $$z=\frac{-2iw-2i}{w-1}\Leftarrow w=\frac{z-2i}{z+2i}$$

1+1 $$|z|=\left|\frac{-2iw-2i}{w+1}\right|\Rightarrow 1=|-2i|\frac{|w+1|}{|w-1|}$$

1+1 $$|w-1|=2|w+1|\Rightarrow (u-1)^2+v^2=4(u+1)^2+4v^2$$

1 $$u^2-2u+1+v^2=4u^2+8u+4+4v^2$$

1 $$3u^2+3v^2+10u+3=0\Rightarrow u^2+v^2+\frac{10}{3}u+1=0$$

وهي معادلة دائرة وهي شكل $|z|=1$ تحت التحويلة أعلاه

ثانياً: ① نفرض أن $z = x+iy$ و $w = u+iv$ عندئذٍ وبأخذ $w = z^2$ — 1

نجد

$u+iv = x^2 - y^2 + i\, 2xy$ — 1

أي أن

$u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$ — 1

وبتعويض معادلة المستقيم $y = x-1$ في مجموعة المعادلات السابقة نجد صورة المستقيم التي تحقق

1 — $u = x^2 - (x-1)^2$ ، $v = 2x(x-1)$

1 — $u = x^2 - x^2 + 2x - 1$ ، $v = 2x(x-1)$

1 — $u = 2x - 1$

1 — $\Rightarrow u+1 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{u+1}{2}$

نعوض في v [illegible]

1 — $v = 2\left(\dfrac{u+1}{2}\right)\left(\dfrac{u+1}{2} - 1\right)$

$v = (u+1)\left(\dfrac{u+1-2}{2}\right) \Rightarrow v = (u+1)\left(\dfrac{u-1}{2}\right)$

1 — $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1) \Rightarrow v + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u^2$

وهذه المعادلة بالشكل $(v - v_0) = 2p(u - u_0)^2$

2 — وهي معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة $(0, -\frac{1}{2})$ وتقعره نحو الـ v^+ ومحوره المحور الشاقولي.

انتهت الإجابات

يتألف هذا السلم من ... صفحات

مدرس المادة
د. [illegible]

جامعة البعث　　　　تحليل عقدي /أ/　　　　اسم الطالب :

كلية العلوم -قسم الرياضيات　　　:الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٢-٢٠١٣

السؤال الأول: (١٠ درجات لكل سؤال)

١"- أوجد العدد العقدي z بحيث تكون الأعداد i, z, iz رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

٢"-اكتب العدد العقدي $\dfrac{\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i}}{\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}}$ على الصورة $a+ib$.

٣ "-اعتماداً" على التوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $\cos z = 2i$.

٤"-أوجد القيمة الأساسية للمقدار i^{2i} .

٥"-أوجد الحل الوحيد للمعادلة $Log\dfrac{\sqrt{3}z^2+1}{2}=i\dfrac{\pi}{3}$.

السؤال الثاني :(١٠+٨+٧=٢٥درجة)

١"- أثبت أن الدالة $u(x,y)=x^3-3xy^2+y$ هي دالة توافقية ثمّ أوجد المرافق التوافقي لها ثمّ عبر عن الدالة ($f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بدلالة Z .

٢"- اعتماداً" على تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$.

٣"- أثبت أن الدالة $f(z)=(r+\frac{1}{r})\cos\theta+i.(r-\frac{1}{r})\sin\theta$ هي دالة تحليلية في أي نطاق لايحوي $z=0$

السؤال الثالث : (١٥+١٠=٢٥درجة)

١"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=-i$ و $z_2=0$ و $z_3=i$ فوق النقاط $w_1=-1$ و $w_2=i$ و $w_3=1$ ثمّ أوجد خيال المستقيم $y=1$ وفق التحويلة الناتجة

٢"-أوجد خيال المستقيم $y+x=-1$.وفق التحويلة $w=z^2$ مع الرسم .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول: $10+10+10+10+10=50$ أختار خمسة

أولاً: تكون الأعداد iz_2 ، iz ، z رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، [illegible] (10)

$$|iz_2 - i| = |iz - z| = |z - i|$$

أي أن:

$$|iz - i| = |iz - z| \Rightarrow |i(x+iy) - i| = |i(x+iy) - (x+iy)|$$

$$|iz - i| = |z - i| \Rightarrow |i(x+iy) - i| = |x+iy - i|$$

$$\Rightarrow |-y + i(x-1)| = |(-y-x) + i(x-y)| \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = (-y-x)^2 + (x-y)^2$$

$$|-y + i(x-1)| = |x + i(y-1)| \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = x^2 + (y-1)^2$$

ومنه

$$(1)\quad y^2 + x^2 - 2x + 1 = y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(2)\quad y^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x = y$$

نعوض (2) في (1) نجد أن:

$$2x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad \Delta = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

أي أن الجواب:

$$z = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

أو

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

ثانياً: (10)

$$\frac{\sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i}}{\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}} = \frac{(\sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i})^2}{(3+4i) - (3-4i)}$$

$$= \frac{3+4i - 2\sqrt{(3+4i)\cdot(3-4i)} + 3 - 4i}{8i} = \frac{6 - 2\sqrt{25}}{8i}$$

$$= \frac{6-10}{8i} = -\frac{4}{8i} = \frac{1}{2}i$$

27/ar

ثالثاً: بما أن $\cos z = 2i \Leftarrow z = \arccos 2i$ 1

(10) درجات، ونعلم أن $\arccos z = -i \operatorname{Log}\left(z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ 1

إذن

$z = \arccos(2i) = -i \operatorname{Log}\left(2i + i(1-(2i)^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ 1

$= -i \operatorname{Log}\left(2i + i(1+4)^{\frac{1}{2}}\right) = -i \operatorname{Log}(2i + i\sqrt{5})$ 1+1

$= -i\left[\operatorname{Log}|(2+\sqrt{5})i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$ 1+1

$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \operatorname{Log}(\sqrt{5}+2)$ 3

رابعاً: اعتماداً على $z^c = e^{c \operatorname{Log} z}$ 1

(10) تكون القيمة الأساسية للمقدار i^{2i} هي

$i^{2i} = e^{2i \operatorname{Log} i} = e^{2i\left[\operatorname{Log}|i| + i\frac{\pi}{2}\right]} = e^{2i\left[\operatorname{Log} 1 + i\frac{\pi}{2}\right]}$ 2 2 2

$= e^{2i\left[0 + i\frac{\pi}{2}\right]} = e^{-\pi}$ 2 1

خامساً: $\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2}\right) = i\frac{\pi}{3} \Rightarrow e^{\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 1

(10) درجات

$\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

أي أن

$z^2 = i \Rightarrow z = (i)^{\frac{1}{2}}$ 2

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow (i)^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$ 2

$k = 0, 1$ سنأخذ $k=0$ يكون

$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ 1

سنأخذ $k=1$ يكون

$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$ 1

ربما لا يكون هنا جزء كل الأرجح للمعادلة المعطاة وذلك لأن $-\pi < \theta \le \pi$ 1

2c

جواب السؤال الثاني: (15 = 7 + 8) أولاً: تعرف الدالة توافقية إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية موجودة ومستمرة وبالإضافة على ذلك تحقق معادلة لابلاس في الثنائية (10)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$$

2 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy+1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$$

هذه المشتقات موجودة ومستمرة وبالإضافة إلى ذلك لدينا

1 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-6x=0$$

لدينا معادلات كوشي نعلم أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

1+1 $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2 \Rightarrow v=3x^2y-y^3+g(x)$

1 $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=6xy+g'(x)$

وأيضاً $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ أي أن

1 $6xy+g'(x)=6xy-1$

1 $\Rightarrow g'(x)=-1 \Rightarrow g(x)=-x+c \Rightarrow v=3x^2y-y^3-x+c$

أي أن

$$f(z)=x^3-3xy^2+c+i(3x^2y-y^3-x+c)$$

1 $$f(z)=z^3+i(-z)+iC=z^3-iz+iC$$

ثانياً: نعلم أن (8)

2 $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

1+1 $$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{(z+\Delta z)^2}-\frac{1}{z^2}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2-(z+\Delta z)^2}{z^2(z+\Delta z)^2\cdot\Delta z}$$

1+1 $$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2-z^2-2z\cdot\Delta z-(\Delta z)^2}{z^2(z+\Delta z)^2\cdot\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-2z-\Delta z}{z^2(z+\Delta z)^2}$$

1+1 $$=-\frac{2z}{z^4}=-\frac{2}{z^3}$$

22/30

ثانياً: حتى تكون الدالة $f(z)$ تحليلية على المستوى لا الذي لا يحوي $z=0$

(7) يجب أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نطاقها، يجب أن تكون المشتقات الجزئية متصلة وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ r و θ موجودة ومستمرة وتحقق شرط كوشي ريمان في كل نقطة من نطاق المشتقات

لدينا

$u(r,\theta) = (r+\frac{1}{r})\cos\theta$ $\quad v(r,\theta) = (r-\frac{1}{r})\sin\theta$

1+1 $\frac{\partial u}{\partial r} = (1-\frac{1}{r^2})\cos\theta$ $\quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = (r-\frac{1}{r})\cos\theta$

+1 $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(r+\frac{1}{r})\sin\theta$ $\quad \frac{\partial v}{\partial r} = (1+\frac{1}{r^2})\sin\theta$

هذه المشتقات موجودة ومستمرة على أي نقطة لا يحوي $z=0$ بالإضافة إلى ذلك تحقق أن

1 $(1-\frac{1}{r^2})\cos\theta = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(r-\frac{1}{r})\cos\theta = (1-\frac{1}{r^2})\cos\theta$

1 $(1+\frac{1}{r^2})\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\cdot -(r+\frac{1}{r})\sin\theta = (1+\frac{1}{r^2})\sin\theta$

أي أن هذه المشتقات تحقق شرط كوشي ريمان بالصيغة القطبية وبالتالي فإن الدالة قابلة للاشتقاق وهذا يعني أنها تحليلية على أي نطاق لا يحوي $z=0$

جواب السؤال الثالث: $\boxed{25 = 10+5}$ خمسة وعشرون

أولاً: التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط (15)

$z_1 = -i$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = i$ فوق النقاط

$w_1 = -1$ ، $w_2 = i$ ، $w_3 = 1$ | هي من الشكل

3

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$\frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{i-1}{i+1} = \frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{0-i}{0+i} \Rightarrow \frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{-1+i}{1+i} = -\frac{z+i}{z-i}$$

$$i\,\frac{w+1}{w-1} = -\frac{z+i}{z-i} \Rightarrow (w+1)(iz+1) = -(w-1)(z+i)$$

$2^{ص}$

6 $\begin{cases} i z w + w + i z + 1 = - w z - i w + z + i \\ i z w + w z + w + i w = - i z + z - 1 + i \\ w z (1+i) + w(1+i) = z(1-i) - (1+i) \\ w(1+i)(z+1) = (1-i)(z-1) \Rightarrow w = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow w = \frac{-iz+i}{z+1} \end{cases}$

وهي التحويلة المطلوبة لإيجاد خيال المستقيم $y=1$ وفق التحويلة السابقة نكتب التحويلة السابقة بالشكل

1 $\quad z = \dfrac{-w+i}{w+i}$

نفرض أن $z = x+iy$ و $w = u+iv$ فيكون

1 $\quad x+iy = \dfrac{-u-iv+i}{u+iv+i} = \dfrac{-u+i(1-v)}{u+i(1+v)}$

1 $\quad x+iy = \dfrac{[-u+i(1-v)][u-i(1+v)]}{u^2+(1+v)^2} = \dfrac{-u^2+1-v^2}{u^2+(1+v)^2} + i\dfrac{2u}{u^2+(1+v)^2}$

1 $\quad y = \dfrac{2u}{u^2+(1+v)^2} \Rightarrow y=1 \Rightarrow 1 = \dfrac{2u}{u^2+(1+v)^2} \Rightarrow$

2 $\begin{cases} u^2+(1+v)^2 = 2u \Rightarrow u^2-2u+1+(v+1)^2 = 1 \\ (u-1)^2+(v+1)^2 = 1 \end{cases}$

أي أن خيال المستقيم $y=1$ هو الدائرة التي مركزها $(1,-1)$ ونصف قطرها $R=1$

(10) تمرين: نفرض أن $z = x+iy$ ، $w = u+iv$

1 $\quad u+iv = x^2-y^2+2ixy \Leftarrow w = u+iv$

أي أن: 1 $\quad u = x^2-y^2 \qquad v = 2xy$

وبما أن: $x+y=-1 \Rightarrow$ $y = -x-1$

ومنه نأخذ خيال المستقيم السابق في مجموعة النقاط

4 $\begin{cases} u = x^2-(x+1)^2 \qquad v = -2x(x+1) \\ u = -2x-1 \Rightarrow x = -\frac{u+1}{2} \\ v = +2\,\frac{u+1}{2}\left(-\frac{u+1}{2}+1\right) = (1+u)\left(\frac{1-u}{2}\right) \end{cases}$

أي أن خيال المستقيم $x+y=-1$ هو مجموعة النقاط

$v - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}u^2$

وهي معادلة قطع مكافئ ذروته $(0,\frac{1}{2})$ تقعره نحو v

التركيب درجات
2

20/

X

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

العلامة: (١٠٠)

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١١-٢٠١٢

كلية العلوم- قسم الرياضيات

السؤال الأول : (٢٠درجة)

إذا كان $z_1 = 2$ و $z_2 = 3-i$ و $z_3 = x+iy$.فأوجد العددين الحقيقيين $x, y \in R$ لتكون الأعداد العقدية السابقة رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ثم أثبت أنّ z_3 يكتب على الصورة $z_3 = 2+\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$ ، أو $z_3 = 2+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$.

السؤال الثاني : (١٢درجة)

أثبت أنّ الدالة $f(z) = r^2\cos 2\theta + \frac{1}{r}\cos\theta + i(r^2\sin 2\theta - \frac{1}{r}\sin\theta)$ دالة تحليلية في أية منطقة من المستوي العقدي لاتحتوي النقطة $z = 0$.

السؤال الثالث : (١٣درجة)

أثبت أنّ الدالة $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ هي دالة توافقية ثم أوجد المرافق التوافقي لها . (في منطقة لا تحوي z = 0)

السؤال الرابع : (١٠درجات)

اعتماداً على الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $\sin z = 3$.

السؤال الخامس : (١٥درجة)

إذا كان $\log z = Log|z| + i\phi$ حيث $0 \le |z|, \frac{2\pi}{3} \le \phi \le \frac{8\pi}{3}$ فأوجد $\log z^2$ و $2\log z$ ، ثمّ قارن بينهما إذا علمت أن $z = i$.

السؤال السادس : (١٥+١٥=٣٠درجة)

"١"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$, $z_2 = \infty$, $z_3 = -i$ فوق النقاط $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ على الترتيب ، ثم أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة.

"٢"- أوجد خيال المثلث الناتج عن تقاطع المستقيمات $y = x, y = -x, y = -1$ وفق التحويلة $w = z^2$.

مدرس المقرر: د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول (20) عشرون درجة :

يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان

$|z_3-z_1| = |z_3-z_2| = |z_2-z_1|$

أي أن

$|z_3-z_1| = |z_2-z_1| \quad \wedge \quad |z_3-z_2| = |z_2-z_1|$

$|x+iy-2| = |3-i-2| \quad \wedge \quad |x+iy-3+i| = |3-i-2|$

$(x-2)^2+y^2 = 2 \quad \wedge \quad (x-3)^2+(y+1)^2 = 2$

(1) $x^2-4x+y^2 = -2 \quad \wedge$ (2) $x^2-6x+y^2+2y = -8$

بطرح (2) من (1) نجد:

$2x-2y = 6 \Rightarrow y = x-3$ (3)

نعوض (3) في (1) فنجد:

$x^2-4x+(x-3)^2 = -2 \Rightarrow x^2-4x+x^2-6x+9 = -2$

$2x^2-10x+11 = 0$

$\Delta = 100-88 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{10+2\sqrt{3}}{4} = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{10-2\sqrt{3}}{4} = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \qquad y_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

أي أن

$z_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

أو

$z_3 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$z_3 = 2+\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 2+\sqrt{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

$= 2+\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

أو

$z_3 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2+\frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$= 2+\sqrt{2}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right] = 2+\sqrt{2}\,e^{-\frac{7\pi}{12}i}$

جواب السؤال الثاني : [12]

$$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{r}\cos\theta$$

$$v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta - \frac{1}{r}\sin\theta$$

تكون الدالة تحليلية إذا تحققت إذا كانت المشتقات الجزئية للدالتين u , v بالنسبة لـ r , θ موجودة ومستمرة وتحقق شرط كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta - \frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 2r^2\cos 2\theta - \frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r^2\sin 2\theta - \frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r\sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\sin\theta$$

نلاحظ أن هذه المشتقات موجودة ومستمرة في أية نقطة من المستوي العقدي لا تحوي النقطة $z=0$ أي $r=|z|=0$ تحليلية

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta - \frac{1}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\left(2r^2\cos 2\theta - \frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

$$= 2r\cos 2\theta - \frac{1}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r\sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\sin\theta = -\frac{1}{r}\left(-2r^2\sin 2\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2r\sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\ldots}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-2y(x^2+y^2) - 4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

وبالتالي نلاحظ أن المشتقات الجزئية الأولى والثانية موجودة ومستمرة كما أنها تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6yx^2-2y^3-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{0}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

لإيجاد المرافق التوافقي نعلم أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

بالمكاملة يكون

$$v = -2x \int \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^2} + \gamma(x)$$

نفرض أن $y = xt \Leftarrow dy = x\,dt$

$$v = -x \int \frac{2x^2 t\,dt}{(x^2+x^2t^2)^2} + \gamma(x) = +\frac{1}{x} \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2} + \gamma(x)$$

نفرض أن $t^2 = u \Leftarrow 2t\,dt = du$

$$v = +\frac{1}{x} \int \frac{du}{(1+u)^2} + \gamma(x) \Rightarrow v = +\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+u} + \gamma(x)$$

$$v = +\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \gamma(x) = +\frac{x}{x^2-y^2} + \gamma(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \gamma'(x)$$

2/5

جواب السؤال الرابع: [10] نقطة

$z = \arcsin 3 \Leftarrow \sin z = 3$

1 $\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$ درجة تعريف

1+1 $\arcsin 3 = -i \log(i3 + \sqrt{1-9}) = -i \log(i3 + (-8)^{\frac{1}{2}})$ درجات

1 $= -i \log(i3 \pm i2\sqrt{2}) = -i \log(3 \pm 2\sqrt{2})i$

1 $\log z = \operatorname{Log}|z| + i(\theta + 2n\pi) \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ درجة تعريف

1+2 $\arcsin 3 = -i \log(3 \pm 2\sqrt{2})i = -i\left[\operatorname{Log}|(3 \pm 2\sqrt{2})i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$ درجات

1 $= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - i \operatorname{Log}(3 \pm 2\sqrt{2})$

جواب السؤال الخامس. [15] خمسة عشر نقطة

6 $\log z^2 = \log i^2 = \log(-1) = \operatorname{Log}|-1| + i\pi = i\pi$

6 $2\log i = 2\left[\operatorname{Log}|i| + i\frac{5\pi}{2}\right] = 2\operatorname{Log} 1 + i5\pi = i5\pi$

درجة تعريف

3 $\log z^2 \neq 2 \log z$

جواب السؤال السادس [30 = 15 + 15] ثلاثون

أ التحويلة الخطية الكسرية في شكل (15)

1 $\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

نفرض في هذه التحويلة كل $z_2 = \infty$ ب $\frac{1}{z_2}$ وكل $w_3 = \infty$ ب $\frac{1}{w_3}$ تصبح

1 $\frac{w-w_1}{w-\frac{1}{w_3}} \cdot \frac{w_2-\frac{1}{w_3}}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{\frac{1}{z_2}-z_3}{\frac{1}{z_2}-z_1} \Rightarrow$

1 $\frac{w-w_1}{ww_3-1} \cdot \frac{w_2w_3-1}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{1-z_2 z_3}{1-z_2 z_1}$

1+1 $\frac{w-0}{w-1} \cdot \frac{0-1}{1-0} = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{1-0}{1-0} \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$

$$1: \quad z = \frac{-iw-i}{w-1} \quad \Leftarrow \quad w = \frac{z-i}{z+i}$$ بما أن

$$1+1 \Rightarrow z = \frac{iw+i}{1-w} \Rightarrow x+iy = \frac{-v+iu+i}{1-u-iv} = \frac{-v+i(u+1)}{(1-u)-iv}$$

ومنه فإن

$$x+iy = \frac{[-v+i(u+1)][(1-u)+iv]}{(1-u)^2+v^2}$$

$$1+1 \quad = \frac{-v(1-u)-v(u+1)}{(1-u)^2+v^2} + i\frac{-v^2+(1+u)(1-u)}{(1-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{-2v}{(1-u)^2+v^2} + i\frac{-v^2-u^2+1}{(1-u)^2+v^2}$$

وباعتبار أن الجزئين الحقيقيين متساويين والتخيليين يكون

$$.+1 \begin{cases} y = \dfrac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \\ x = \dfrac{-2v}{(1-u)^2+v^2} \end{cases}$$

ومنه فإن خيال المستقيم $y=0$ هو مجموعة النقاط

$$1-u^2-v^2=0$$ أي $u^2+v^2=1$ وهي مجموعة نقاط الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $R=1$

1/1

(15) ت - بفرض أن $z=x+iy$ $\Leftarrow$ $z^2=x^2-y^2+i2xy$ وبفرض أن $w=u+iv$ حيث

$$1) \quad u = x^2-y^2 \qquad v = 2xy$$

خيال المستقيم $y=1$ هو مجموعة النقاط

$$3) \begin{cases} u = x^2-1 \qquad v = 2x \\ \Rightarrow u = \frac{v^2}{4}-1 \Rightarrow u+1 = \frac{1}{4}v^2 \end{cases}$$

وهي معادلة قطع مكافئ ذروته $(-1,0)$ وفتحته نحو u^+

خيال المستقيم $x=y$ هي مجموعة النقاط $u=x^2-(x)^2=0 \wedge v=2x^2$

3 وهي مجموعة النقاط التي تقع على الجزء الموجب من محور السينات(؟)

وخيال المستقيم $y = x$ هي مجموعة النقاط

3

$u = x^2 - x^2 = 0$ ، $v = 2x^2$

وهي مجموعة النقاط التي تمثل الجزء الموجب من المحور الشاقولي

3

$y = -1$ ، $y = -x \Leftarrow x = 1$ تتقاطع نقاط المستقيمين في $(1,-1)$

وخيال هذه النقطة هي $w = (1-i)^2 = -2i$

$y = -1$ ، $y = x \Leftarrow x = -1$ تتقاطع نقاط المستقيمين في $(-1,-1)$

وخيال هذه النقطة هي $w = (-1-i)^2 = 2i$

$y = -x$ ، $y = x \Leftarrow$ تتقاطع نقاط هذين المستقيمين في $(0,0)$

وخيال هذه النقطة هي $w = 0$

2

إذن خيال المثلث هو الجزء المحصور بين القطع المكافئ $u + 1 = \frac{v^2}{4}$ والمستقيم $u = 0$

انتهت الإجابات

مدرس المادة

د.



جامعة البعث　　　　تحليل عقدي /١/　　　　اسم الطالب : ....

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　　دورة مرسوم ٢٠٠٩-٢٠١٠

السؤال الأول : (١٠ درجات)

أوجد المعادلة الديكارتية للحامل الهندسي لمجموعة النقاط التي تناظر الأعداد العقدية $z = z_0 + ae^{it} + be^{-it}$ حيث $a,b,t \in R^*$ و $z_0 = x_0 + y_0$.

السؤال الثاني : (١٥ درجة)

لتكن $z_1 = 1, z_2 = 2+i, z_3 = x+y$ والمطلوب ايجاد قيم x, y لتكون هذه الأعداد رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، ثمّ أثبت أن z_3 يكتب بالشكل

$$z_3 = 1+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \qquad \text{أو} \qquad z_3 = 1+\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

السؤال الثالث : (١٥ درجة)

أوجد الحل الوحيد للمعادلة $\log\left(z^2-1\right) = i\dfrac{\pi}{2}$

السؤال الرابع : (١٢+١٣=٢٥ درجة)

١"- اذا كانت c هي القطعة المستقيمة الواصلة من $z=1$ الى $z=1+i$ فأثبت أن

$$\int_c \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{i}{4}\log 5$$

٢"- أوجد قيمة التكامل الآتي

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)(z^2+2z)}dz$$

السؤال الخامس : (١٥ درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 1, z_2 = -i, z_3 = -1$ فوق النقاط $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$ على الترتيب، ومن ثم أوجد من خلال التحويلة الناتجة خيال الدائرة $|z| = 1$.

انتهت الأسئلة　　　　مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

(٢٨)

جواب السؤال الأول: [١٥] خمسة عشر درجة

نفرض أن $z = x + iy$ حيث

$$z - z_0 = a e^{it} + b e^{-it} \Rightarrow (x - x_0) + i(y - y_0) = a e^{it} + b e^{-it}$$

$$\Rightarrow (x - x_0) + i(y - y_0) = a \cos t + i a \sin t + b \cos t - b i \sin t$$

$$= (a+b)\cos t + i(a-b)\sin t$$

وبمساواة الجزئين الحقيقيين والتخيليين يكون

$$x - x_0 = (a+b)\cos t \wedge y - y_0 = (a-b)\sin t$$

أي أن

$$\frac{x - x_0}{(a+b)} = \cos t \wedge \frac{y - y_0}{a-b} = \sin t$$

بالتربيع والجمع نجد أن

$$\frac{(x - x_0)^2}{(a+b)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(a-b)^2} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه (x_0, y_0)

جواب السؤال الثاني: [15] درجة

بما أن المثلث متساوي الأضلاع فيكفي أن نتحقق

$$|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

~~$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$~~ $\Rightarrow |(x-1) + iy| = |1 + i|$

$$|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| \quad |(x-2) + i(y-1)| = |1 + i|$$

1 $\operatorname{Arg} z_0 = \arctan \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ $\operatorname{Arg} \bar{z}_0 = \arctan \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(30-45)}{\cos(30-45)} = \frac{\sin 30 \cos 45 - \cos 30 \sin 45}{\cos 30 \cos 45 + \sin 30 \sin 45}$$

1 $$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{12} = \arctan \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{Arg} z_0 = -\frac{\pi}{12}$$

1 $$z = 1+\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\tan\left(7\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\frac{5\pi}{12} = -\frac{\sin(30+45)}{\cos(30+45)}$$

1 $$= -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{7\pi}{12} = \arctan\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Arg} \bar{z}_0 = \frac{7\pi}{12}$$

1 $$z = 1+\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جواب السؤال الثالث [15] خمسة عشر درجة

$$\operatorname{Log}(z^2-1) = i\frac{\pi}{2}$$

1 + 1 $$z^2 - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \Rightarrow z^2 = 1+i \Rightarrow$$

$$z = (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

منه ينتج

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \end{cases}$$

بالطرح ينتج

$$2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$$

نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين ينتج

$$x^2 - 2x + 1 + 4 - 4x + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية

$$\begin{cases} \Delta = 36 - 24 = 12 \\ x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = 2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2 = 2 - \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

الحل

$$z = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

أو

$$z = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

نلاحظ أنه يمكن كتابة الحلين السابقين بالشكل

$$z = 1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2} = 1 + z_0 = 1 + r_0 e^{i\,Arg z_0}$$

$$z = 1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + z_0^* = 1 + r_0 e^{i\,Arg z_0^*}$$

$$|z_0| = |z_0^*| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

إذاً

$$r_0 = r_0^* = \sqrt{2}$$

1 $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ درجة

2 $(1+i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$ $k=0,1$

درجة لـ k=0 درجة

2 $z_0 = (1+i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

2 $z_1 = (1+i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$ درجة لـ k=1 درجة

2 $-\pi < Arg(z^{2}-1) < \pi$ ... z_0 ... $< \pi$

... z_1 ...

جذب السؤال الرابع 12 $\boxed{25 = 13+12}$ درجة

12 ... الدالة التحليلية ... الدالة ... الأشكال ...

1 ... الذي ... الدالة ... الأشكال

2 $\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z \Big|_{1}^{1+i}$

$\arctan(1+i) = \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{i+(1+i)}{i-(1+i)} = \frac{i}{2}\operatorname{Log}-(1+2i)$

5 $= \frac{i}{2}\left[\operatorname{Log}|1+2i| + i\,Arg-(1+2i)\right]$ درجات

$|1+2i| = \sqrt{5}$ $\quad Arg-(1+2i) = \arctan 2$

$\arctan(1+i) = \frac{i}{2}\left[\operatorname{Log}\sqrt{5} + i\arctan 2\right] = -\frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{i}{4}\operatorname{Log}5$

$\arctan(1) = \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{i+1}{i-1} = \frac{i}{2}\operatorname{Log}-\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{i}{2}\operatorname{Log}-i$

3 $= \frac{i}{2}\left[\operatorname{Log}|-i| - i\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$

$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{i}{4}\operatorname{Log}5 - \frac{\pi}{4}$

ج- النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $z(z+2)^2=0$

والتي تقع داخل الدائرة C هي $z=0$ و $z=-2$

(13) أي التي مركزها $z=0$ ونصف قطرها $R=3$

نحيط $z_1=0$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كافٍ

ثم نحيط $z_2=-2$ بدائرة C_2 نصف قطرها صغير بقدر كافٍ بحيث $C_1 \cap C_2 = \phi$

عند تطبيق صيغة كوشي للمشتقات للمنطقة المتعددة الترابط يكون

2 $$\oint_C \frac{e^z}{(z+2)(z^2+2z)}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+2)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z+2)^2}\,dz$$

2 + 2 $$= 2\pi i \left.\frac{e^z}{(z+2)^2}\right|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^z}{z}\right]'_{z=-2}$$

1 + 2 $$= \frac{2\pi i}{4} + 2\pi i\left[\frac{ze^z - e^z}{z^2}\right]_{z=-2}$$

2 $$= \frac{2\pi i}{4} + 2\pi i\left[\frac{-2e^{-2} - e^{-2}}{4}\right] = \frac{\pi i}{2} - \frac{3\pi i}{2}e^{-2}$$

جواب السؤال الخامس (15) خمسة عشر درجة

التحويلة من الشكل

1 $$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

1 $$\frac{w-w_1}{\quad}\cdot \quad w_2-\frac{1}{w_3} \qquad z-z$$

(س ١)

درجة كاملة

2 $\quad w = \dfrac{-z+1}{z+1} \Rightarrow \quad wz + w = -z + 1$

$wz + z = 1 - w \Rightarrow z = \dfrac{1-w}{1+w}$

3 $\quad |z| = \dfrac{|1-w|}{|1+w|} = 1$ محيط دائرة

وبالتالي فإن تحويل الدائرة $|z| = 1$ هي مجموعة النقاط $w = u + iv$ التي تحقق

2 $\quad |1+w| = |1-w| \Rightarrow (1+u)^2 + v^2 = (1-u)^2 + v^2$

1+1 $\quad 2u = -2u \Rightarrow -4u = 0 \Rightarrow u = 0$

1 $\quad$ أي أن تحويل الدائرة $|z| = 1$ هي المستقيم $u = 0$

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. [illegible]

[illegible]

١٢/٩/٢٠١٠